

Imię

Data

Nazwisko

Kierunek studiów

Ćwiczenie 119

Ruch harmoniczny prosty masy na sprężynie

Tabela I: Część X19. Wyznaczanie stałej sprężyny

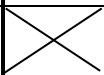
Położenie równowagi $x_0 = \dots\dots\dots$ m

Ciężar – Q	[N]						
x	[m]						
$\Delta x = x - x_0$	[m]						

Wartość stałej sprężyny k odczytana z wykresu komputerowego: $k = \dots\dots\dots$ N/m.

Tabela II. Część P19. Wyznaczanie okresu drgań masy zawieszanej na sprężynie

Masa zawieszona $m = \dots\dots\dots$ kg

Nr wierzchołka		0	1	2	3	4	5	6	7	8
Czas	[s]									
Okres T_i	[s]									

Średnia wartość okresu drgań wynikająca z tabeli II: $\bar{T} = \sum_{i=1}^N \frac{T_i}{N} = \dots\dots\dots$ sŚrednie kwadratowe odchylenie standardowe dla okresu drgań: $S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{T} - T_i)^2}{N(N-1)}} = \dots\dots\dots$ sBłąd procentowy wyznaczonego okresu drgań: $\frac{S_{\bar{T}}}{\bar{T}} * 100\% = \dots\dots\dots\%$ Wartość okresu drgań powyższej masy, obliczona na podstawie teoretycznego wzoru $T_t = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$T_t, \quad [s]$	$B_p = \frac{ T_t - \bar{T} }{T_t} \cdot 100\%$

Ćwiczenie 119. Ruch harmoniczny masy na sprężynie

CEL

Celem tego ćwiczenia jest zbadanie ruchu masy oscylującej na sprężynie.

TEORIA

Stała sprężystości

Założmy, że wieszamy sprężynę pionowo w dół. Długość sprężyny nieobciążonej wynosi l . Po obciążeniu sprężyny masą m , jej długość zwiększy się o Δl . Położenie równowagi masy jest teraz w odległości $l + \Delta l$ od punktu zawieszenia sprężyny. Zgodnie z prawem Hooke'a, rozciągnięcie Δl jest proporcjonalne do ciężaru zawieszonego na sprężynie w tym przypadku: mg (g - przyspieszenie grawitacyjne):

$$mg = k\Delta l \quad (1)$$

Iloczyn $k\Delta l$ nazywamy siłą sprężystości. k jest stałą związaną z trudnością odkształcania się sprężyny i nazywa się ją stałą sprężystości; jest to wielkość charakterystyczna dla każdej sprężyny. Jednostką stałej sprężystości jest N/m (niuton na metr).

Analiza ruchu harmonicznego

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy masę zawieszoną na sprężynie odciągamy na niewielką odległość x w dół od położenia równowagi. Sprężyna zacznie działać na masę niezrównoważoną siłą sprężystości:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad (2)$$

Znak ujemny wskazuje, że siła skierowana jest przeciwnie do kierunku przemieszczenia masy. Siła sprężystości powoduje, że masa oscyluje w górę i w dół. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, wiemy, że niezrównoważona siła powoduje przyspieszenie ciała $F = ma$. Możemy, więc zapisać równanie (2) w postaci:

$$ma = -kx \quad (3)$$

Pamiętając, że przyspieszenie jest drugą pochodną drogi (w tym przypadku wychylenia) po czasie $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, otrzymujemy równanie ruchu dla ciała o masie m drgającego na sprężynie o współczynniku sprężystości k :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (4)$$

Rozwiązaniem takiego równanie ruchu jest funkcja harmoniczna:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

gdzie A – to amplituda ciała, czyli początkowe odchylenie ciała od położenia równowagi, ω to częstość kołowa drgań:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

a φ – to faza początkowa naszego ruchu. Ponieważ ruch zaczynamy od wychylenia ciała do amplitudy A , to znaczy, że dla czasu $t = 0$ s, musi być spełniona zależność $x(t = 0) = A \sin(\varphi) = A \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$. Dlatego równanie na wychylenie (5) przyjmuje postać:

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

Pamiętając, że: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (gdzie f – to częstotliwość), możemy napisać, że okres w ruchu harmonicznym wynosi:

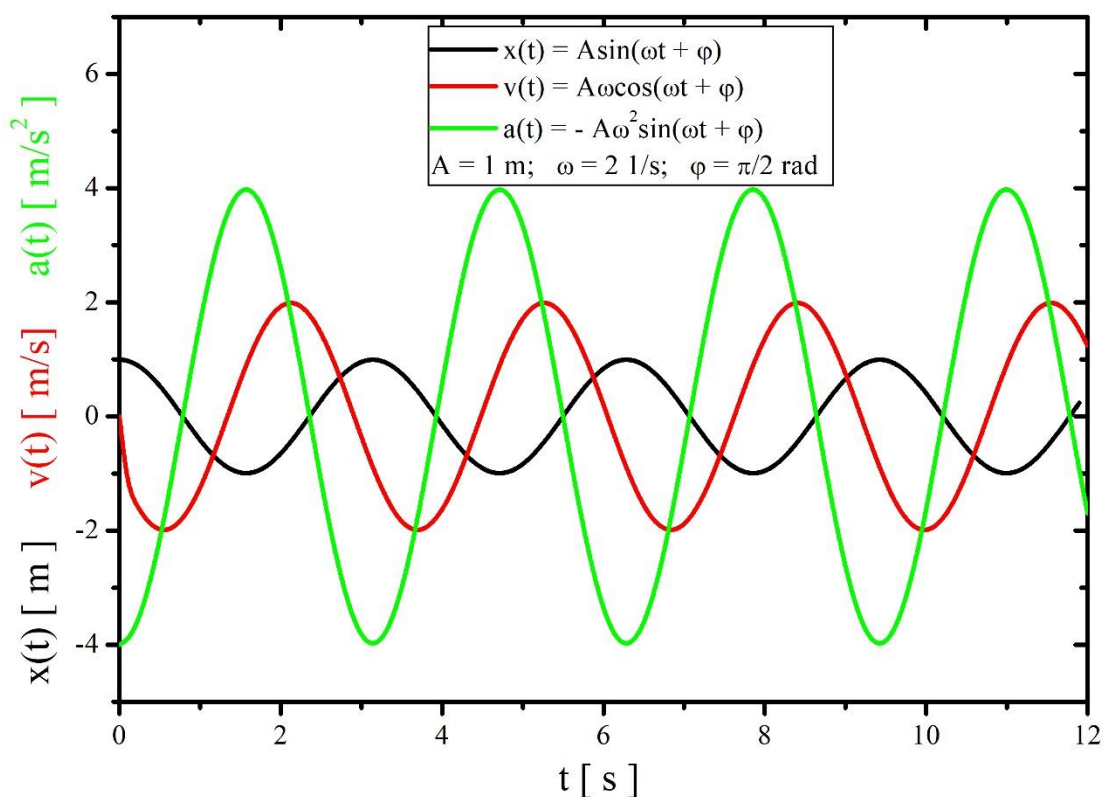
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)$$

Zgodnie z definicją prędkość to pierwsza pochodna drogi (wchylenia) po czasie, a przyspieszenie to pierwsza pochodna prędkości po czasie. Dlatego dla ruchu harmonicznego otrzymujemy:

$$v(t) = A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9)$$

$$a(t) = -A \frac{k}{m} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (10)$$

Wykres poniżej obrazuje zachowanie się funkcji położenia, prędkości i przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym.



Tłumienie w ruchu harmonicznym

Dołączmy teraz do rozpatrywanego przypadku siłę pochodzącą od oporów ruchu powietrza (przypadek rzeczywisty). Siła oporu w ruchu harmonicznym powoduje tłumienie drgań ciała. Wiemy z doświadczenia, że taka siła powinna być proporcjonalna do prędkości, dlatego możemy zapisać, że:

$$\vec{F}_r = -b\vec{v} \quad (11)$$

gdzie znak minus informuje nas, że siła oporów ruchu działa w kierunku przeciwnym do prędkości, a współczynnik b nazywamy stałą tłumienia.

W takim przypadku równanie ruchu przyjmie postać:

$$ma = -kx - bv \quad (12)$$

czyli:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (13)$$

Rozwiązaniem takiego równania jest funkcja:

$$x(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}} \sin(\omega' t + \varphi) \quad (14)$$

Amplituda drgań ciała poruszającego się ruchem harmonicznym, które podlega tłumieniu, maleje w czasie zgodnie z wzorem:

$$A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \quad (15)$$

Oczywiście warunek początkowy (moment odchylenia i puszczenia ciała w ruch) narzuca:

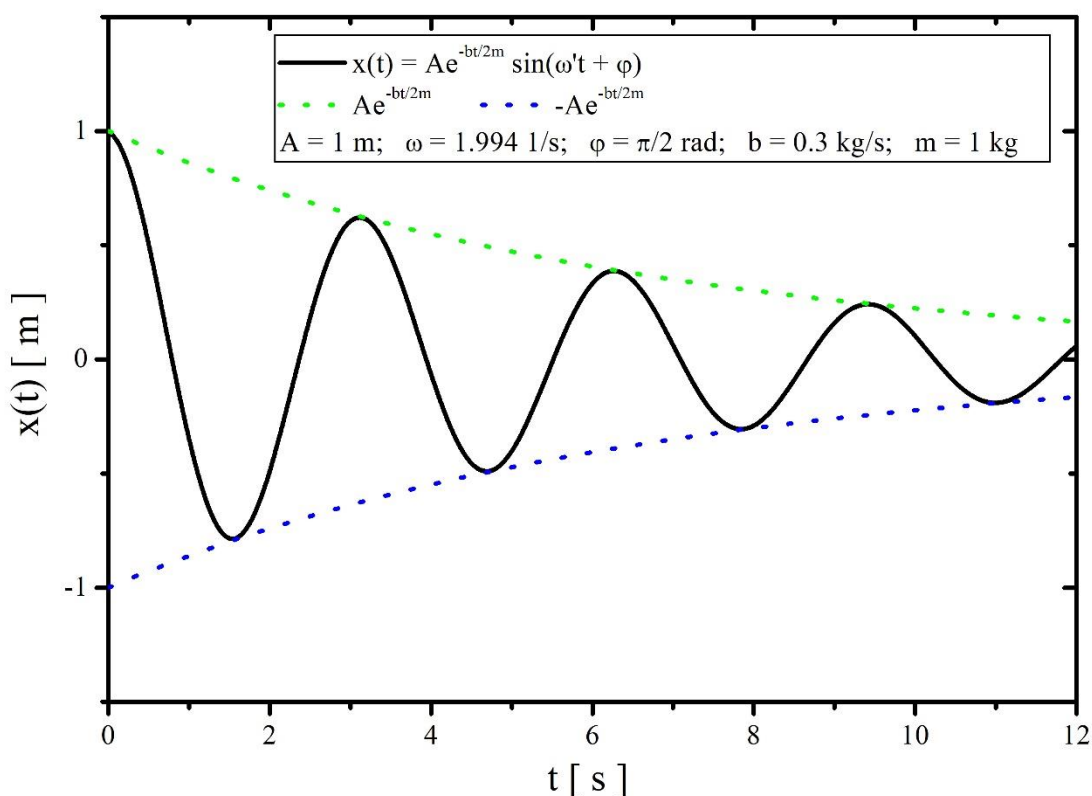
$$x(t=0) = Ae^0 \sin(\varphi) = A \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$$

Z kolei częstotliwość drgań w takim ruchu nie zależy od czasu i dana jest wzorem:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (16)$$

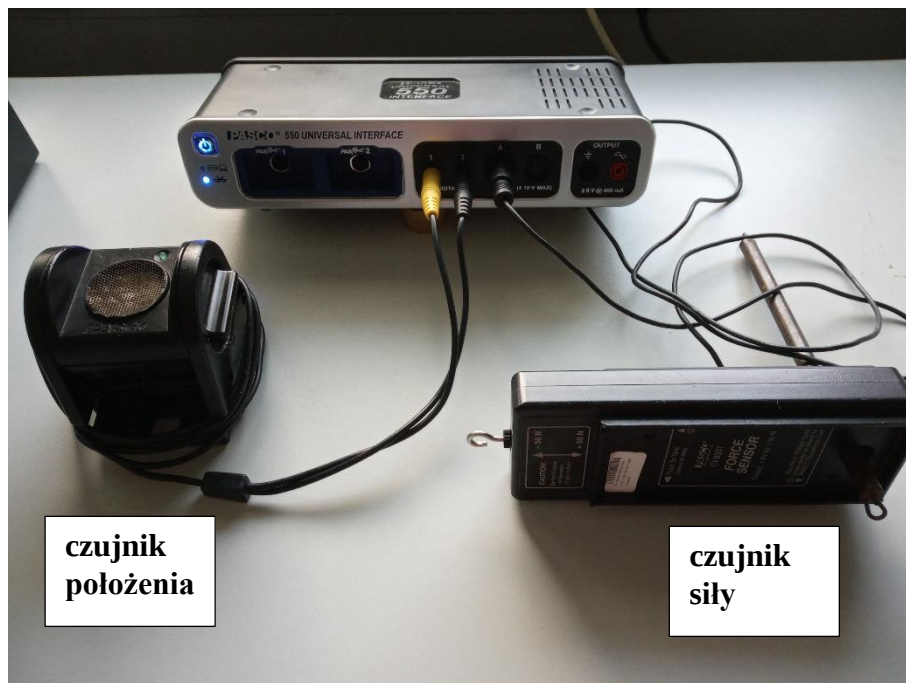
Można zauważyć, że gdy $b=0$, tzn. tłumienia nie ma, powyższe równania (14) i (16) sprowadzają się do równań (5) i (6).

Wykres poniżej obrazuje zachowanie się funkcji położenia od czasu w ruchu harmonicznym tłumionym.

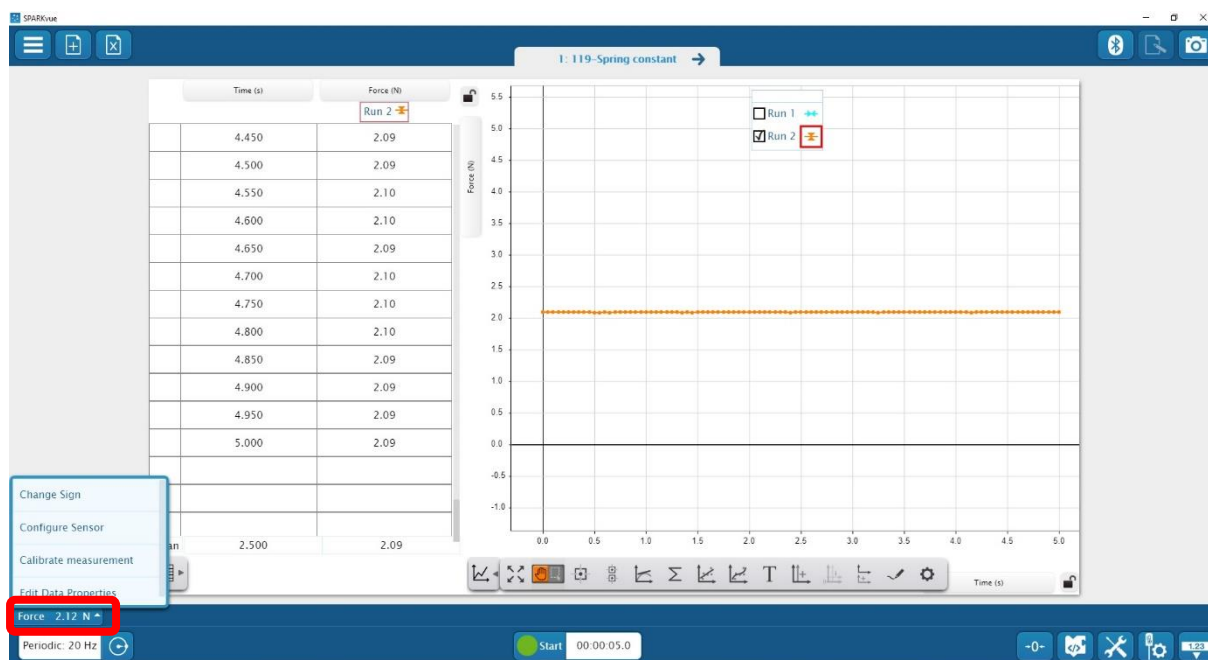


Przebieg ćwiczenia

1. Włącz zasilanie stołu (patrz deska rozdzielcza stołu – przy Twojej prawej nodze, gdy siedzisz na wprost komputera) – przekręć czerwoną „gałkę” w kierunku strzałek (powinna wyskoczyć), przekręć kluczyk jak w samochodzie i puść.
2. Włącz w następującej kolejności: (1) PASCO universal interface, a następnie (2) komputer.
3. Podłącz (jeśli trzeba) czujnik siły do kanału analogowego A oraz czujnik położenia do kanałów cyfrowych (żółta końcówka – kanał 1, czarna końcówka – kanał 2)

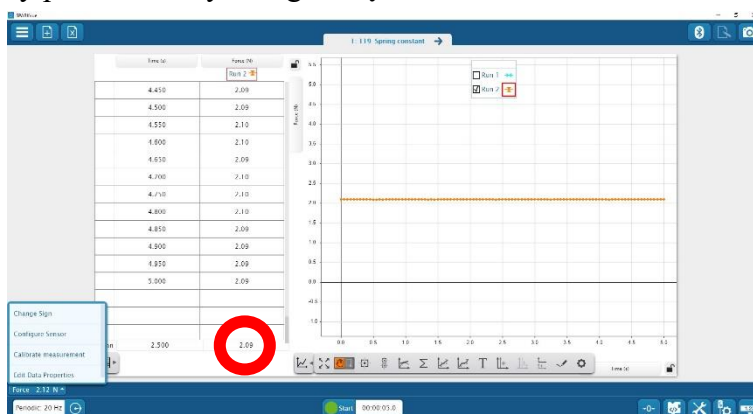


4. Przymocuj czujnik siły na samej górze statywu (jeśli jest w innym miejscu), a czujnik położenia ustaw bezpośrednio pod czujnikiem siły na podstawie statywu.
5. Otwórz program SPARKvue, kliknij „Open Saved Experiment” i wybierz z pulpitu program „Ex119-SpringConstant” (wygląd aplikacji w załączonej poniżej fotografii). Kliknij lewym przyciskiem myszki w ikonkę od wskazań czujnika siły (czerwona ramka na zdjęciu poniżej) i wybierz opcję: „Calibrate measurement” w celu skalibrowania czujnika siły.

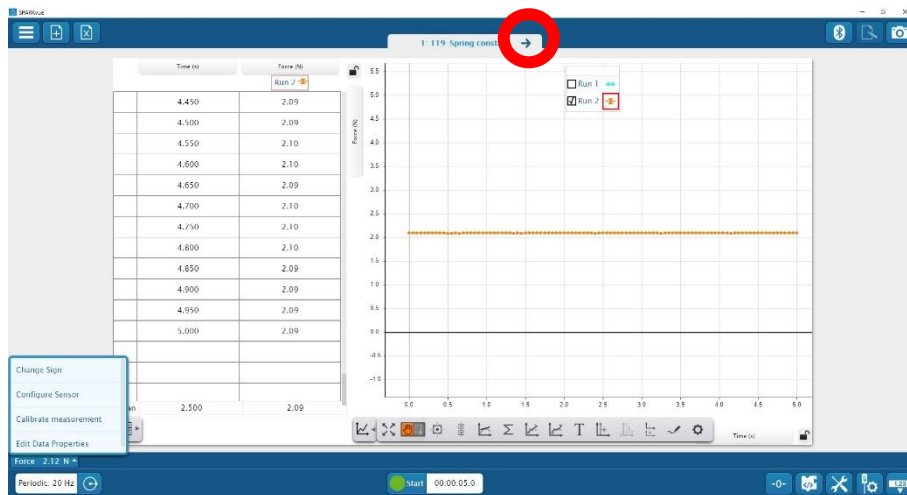


6. W nowo otwartym oknie „Calibrate sensor: Select Measurement” wybieramy metodę dwupunktowej kalibracji (jak na poniższej lewej fotografii) a następnie klikamy „Continue”. Pojawi się okno „Calibrate sensor: Enter Values” (prawa fotografia poniżej).

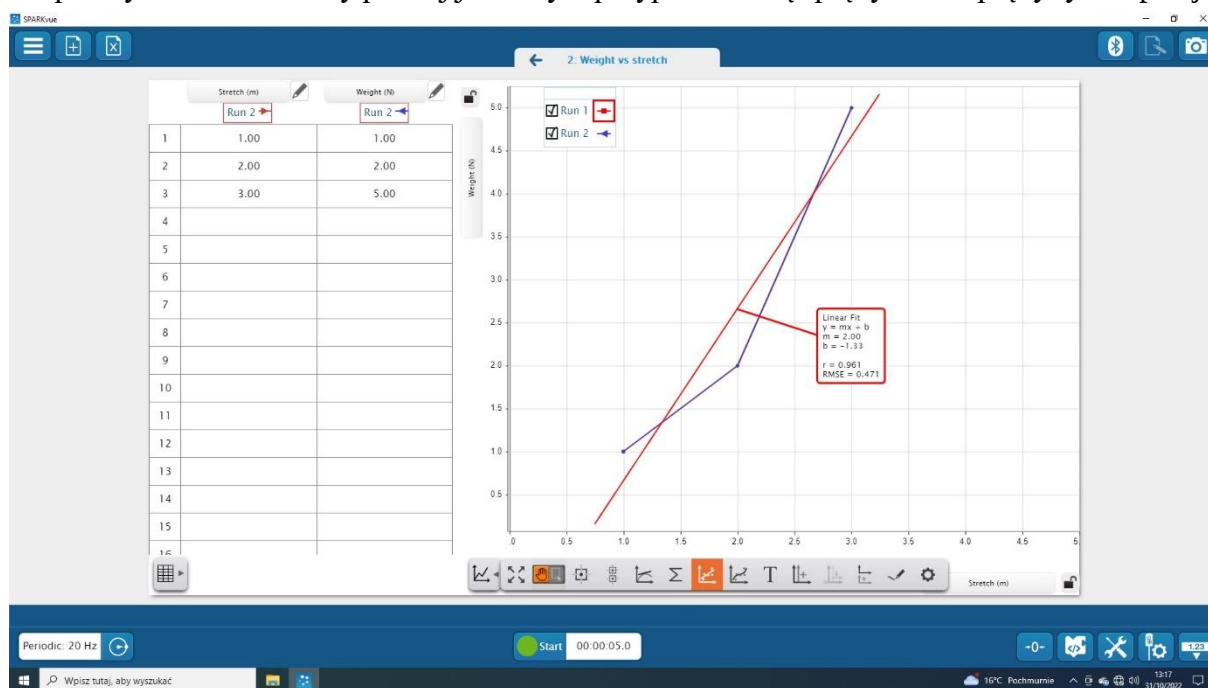
7. Dla pierwszego punktu kalibracyjnego wpisujemy w „Calibration Point 1” w pozycji „Standard Value” 0 i klikamy enter. Następnie na czujniku siły znajdujemy przycisk zerowania tary, który naciskamy. Po tej operacji klikamy „Set Calibration”. Program odczyta bieżące wskazania czujnika siły.
8. By wyznaczyć drugi punkt kalibracyjny bierzemy odważnik 0.5 kg (powinien znajdować się przy stanowisku do ćwiczenia 114). Ważymy go i otrzymaną masę przemnażamy przez przyspieszenie ziemskie $g=9.81 \text{ N/kg}$. Obliczony ciężar odważnika wpisujemy ze znakiem **minus** w pozycji „Standard Value” dla drugiego punktu kalibracyjnego „Calibration Point 2” (**pamiętamy, że przy wpisywaniu liczby używamy ‘.’ a nie ‘,’**). Ciężarek wieszamy na czujniku siły! Po ustaniu drgań klikamy „Set Calibration” dla drugiego punktu kalibracyjnego. Program odczyta wskazania czujnika i wyznaczy tzw. prostą kalibracji, której współczynniki można podejrzeć w ostatniej pozycji okna „Calibrate Sensor: Enter Values”. **Zwracamy odważnik 0.5 kg na miejsce, z którego został wzięty.**
9. Zawieś sprężynę na haku razem z wieszakiem na ciężarce.
10. Na podziałce milimetrowej odczytaj położenie końca sprężyny (ostatniego zwoju). Zapisz w tabeli wynik pomiaru położenia równowagi sprężyny x_0 .
11. **Tarujemy wskazania czujnika siły – przycisk z boku czujnika.**
12. Zawieś masę 10 g (zważ wcześniej odważniki, jakie są dostępne w ćwiczeniu) i odczytaj nowe położenie końca sprężyny (ostatniego zwoju) i zapisz je w tabeli w wierszu oznaczonym przez x.
13. Odczytaj ciężar zawieszonoj masy - kliknij w aplikacji przycisk Start. Program odczyta wskazania czujnika siły i je uśredni. Do tabeli wpisujemy wartość wskazaną na fotografii poniżej. Odczyt będzie prawidłowy pomimo małych drgań ciężarka.



14. Zwiększając masę, co 10 g wpisujemy do tabeli nowe położenie końca sprężyny i nowy ciężar zmierzony za pomocą czujnika siły. (**pamiętamy, że przy wpisywaniu liczby używamy ‘.’, a nie ‘,’**).
15. Po uzupełnieniu tabeli wyliczamy wychylenie sprężyny liczoney względem nieobciążonej sprężyny: $\Delta x = x - x_0$
16. Następnie zmieniamy kartę w aplikacji klikając strzałkę wskazaną na poniższej fotografii.



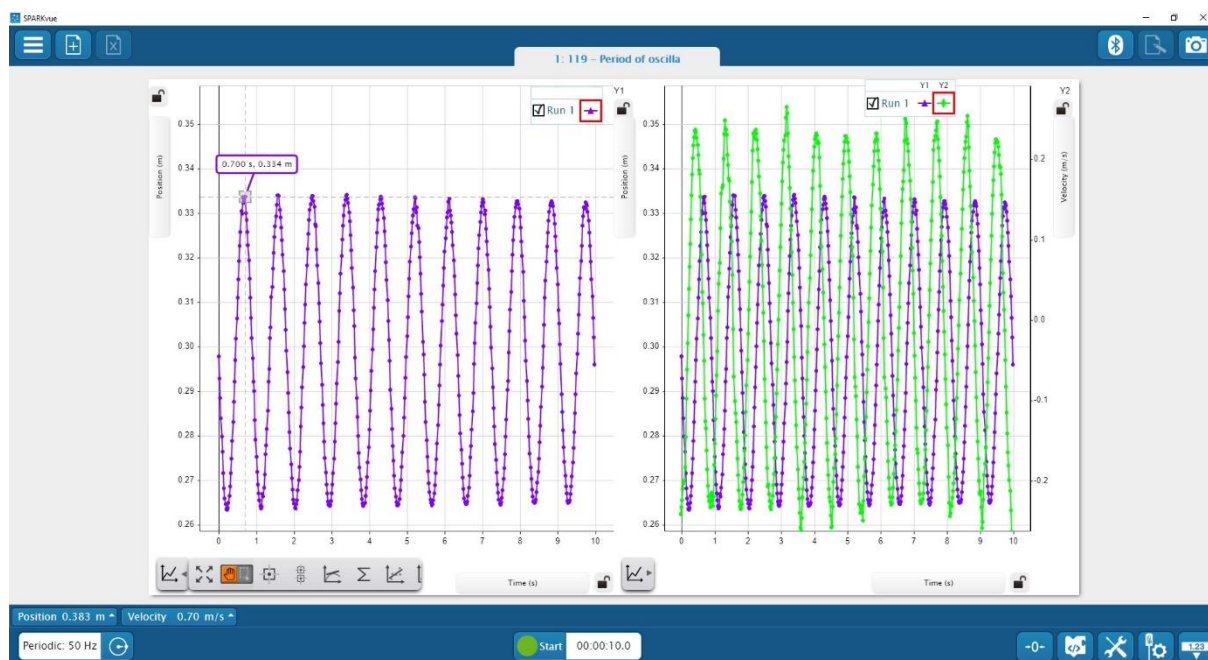
17. Wpisujemy w tabelę aplikacji zmierzone wychylenia i ciężary, a następnie do otrzymanego wykresu dopasowujemy równanie prostej klikając odpowiednią ikonę w aplikacji (fotografia poniżej). (**pamiętamy, że przy wpisywaniu liczby używamy ‘.’, a nie ‘,’**). Wyznaczony współczynnik kierunkowy prostej jest w tym przypadku stałą sprężystości sprężyny – zapisujemy



go w tabeli.

18. Zamykamy aplikację.
19. Otwórz program SPARKvue, kliknij “Open Saved Experiment” i wybierz z pulpitu „Ex119-Period of oscilation”.
20. Nie zmieniamy stanowiska! Tzn. nie ściągamy czujnika siły, a czujnik siły powinien znajdować się na podstawie statywu bezpośrednio pod wieszanymi ciężarkami.
21. Na sprężynę zakładamy masę z przedziału 30-60 g.

22. Odchylamy zwieszoną masę od położenia równowagi o około 2 cm.
 23. Włączamy aplikację klikając przycisk Start. Program dokona pomiaru wychylenia od czasu (lewy i prawy wykres), jak również pomiaru zmian prędkości drgającej masy (prawy wykres)



24. Kliknij przycisk  - narzędzie do odczytywania współrzędnych punktu z wykresu. Ustawiamy to narzędzie tak by pokazywało nam punkt maksymalnego wychylenia. Do tabeli wpisujemy składową x-ową, czyli czas dla dziewięciu kolejnych wierzchołków.
 25. Znajdź okres każdego drgania (oblicz różnicę czasów odczytanych dla kolejnych wierzchołków). Oblicz średni okres drgań $\bar{T}$. Zapisz uzyskany wynik.
 26. Oblicz średnie kwadratowe odchylenie standardowe dla tego pomiaru zgodnie z wzorem:

$$S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{T} - T_i)^2}{N(N-1)}}$$

 27. Oblicz błąd procentowy dla pomiaru korzystając ze wzoru $\frac{S_{\bar{T}}}{\bar{T}} * 100\%$.
 28. Oblicz teoretyczną wartość okresu drgań $T_t = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, wykorzystując zmierzoną wartość stałej sprężyny i wartość masy (w kg) zawieszoną na sprężynie. Znajdź procentową różnicę pomiędzy obliczoną i zmierzoną wartością okresu: $B_p = \frac{|T_t - \bar{T}|}{T_t} \cdot 100\%$
 29. Zapoznaj się z pytaniami do „przedyskutowania” we wnioskach w sprawozdaniu.
 30. Zamknij aplikację i wyłącz komputer.

Pytania do „przedyskutowania” we wnioskach w sprawozdaniu

- Porównaj obliczoną wartość okresu drgań z wartością zmierzoną. Do rozważań wykorzystaj obliczony błąd procentowy wyznaczenia okresu oraz różnicę procentową pomiędzy obliczoną i zmierzoną wartością okresu.
- Jaka jest prędkość masy w miejscu największego odchylenia od położenia równowagi? Skorzystaj z prawego wykresu w aplikacji **Ex119-Period of oscilation**.
- Gdzie znajduje się masa względem położenia równowagi, gdy bezwzględna wartość prędkości jest największa? Skorzystaj z prawego wykresu w aplikacji **Ex119-Period of oscilation**.